Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ: 11/3/2017

ΘΕΜΑ Α'

Α1 i) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$ ii) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$ iii) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$: δεν ορίζεται

iv) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \Rightarrow$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

v) $f(-3) = 4$ vi) $f(-2) = 3$ vii) $f(4) = 4$

Α2 i) Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$, άρα $x+2>0$ κοντά στο 1

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3) = -2$, άρα $x^2-3<0$ κοντά στο 1

$\lim\limits_{x\to 1} x = 1$, άρα $x>0$, κοντά στο 1

Άρα: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x+2|+|x^2-3|-5}{|x|-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)+(-x^2+3)-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^2+x}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(-x) = \underline{\underline{-1}}$

ii) Είναι: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+6}+\sqrt{x^2+x+2}-5x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{3x+6}-3x}{x^2-1} + \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2x}{x^2-1}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+6-9x^2}{(x^2-1)\cdot(\sqrt{3x+6}+3x)} + \dfrac{x^2+x+2-4x^2}{(x^2-1)\cdot(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3(-3x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)\cdot(\sqrt{3x+6}+3x)} + \dfrac{-3x^2+x+2}{(x-1)(x+1)\cdot(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}\right) =$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-9\cancel{(x-1)}(x+\frac{2}{3})}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{3x+6}+3x)}+\frac{-3\cancel{(x-1)}(x+\frac{2}{3})}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-9x-6}{(x+1)(\sqrt{3x+6}+3x)}+\frac{-3x-2}{(x+1)(\sqrt{x^2+x+2}+2x)}\right)=\frac{-15}{2\cdot(3+3)}+\frac{-5}{2\cdot(2+2)}=-\frac{15}{12}-\frac{5}{8}=-\frac{15}{8}$$

A3 i) Θέτουμε: $h(x)=\frac{f(x)}{x-3}$, οπότε $\lim_{x\to 3}h(x)=5$

άρα $f(x)=(x-3)\cdot h(x)$ ①

άρα $\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}(x-3)\cdot h(x)=(3-3)\cdot 5=0$

ii) Είναι: $\lim_{x\to 3}\frac{6f(x)+x^2+6x-27}{x^2-9}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{6(x-3)\cdot h(x)+(x-3)(x+9)}{(x-3)(x+3)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(6h(x)+x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{6h(x)+x+9}{x+3}=\frac{6\cdot 5+3+9}{3+3}=7$$

iii) Είναι: $\lim_{x\to 3}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-x-6}\cdot(x^2-x-6)\,g(x)=$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)h(x)}{(x-3)(x+2)}(x^2-x-6)g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{h(x)}{x+2}(x^2-x-6)g(x)=\frac{5}{3+2}\cdot 3=3$$

A4 i) $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3\sqrt{x^2+3}-6}{\sqrt{2x^2+7}-3}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)\cdot(\sqrt{2x^2+7}+3)}{(\sqrt{2x^2+7}-3)(\sqrt{2x^2+7}+3)\cdot(\sqrt{x^2+3}+2)}=$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{3\cdot(x^2+3-4)(\sqrt{2x^2+7}+3)}{(2x^2+7-9)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x^2-1)(\sqrt{2x^2+7}+3)}{2(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{3\cdot(\sqrt{2x^2+7}+3)}{2(\sqrt{x^2+3}+2)}=\frac{3\cdot(\sqrt{2+7}+3)}{2\cdot(\sqrt{1+3}+2)}=\frac{3\cdot(3+3)}{2\cdot(2+2)}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$

ii) Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$ θα πρέπει

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{9}{4}$

Για $x > 1$ έχουμε: $f(x) = \frac{5ax^2 - \beta x + 8}{4x^3 - 4}$

$\Leftrightarrow 5ax^2 - \beta x + 8 = (4x^3 - 4) \cdot f(x)$

άρα $\lim_{x\to 1^+} (5ax^2 - \beta x + 8) = \lim_{x\to 1^+} (4x^3 - 4) \cdot f(x) \Leftrightarrow$

$5a - \beta + 8 = (4-4) \cdot \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5a - \beta + 8 = 0 \Leftrightarrow \beta = 5a + 8$ (1)

Είναι: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{5ax^2 - \beta x + 8}{4x^3 - 4} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{5ax^2 - (5a+8)\cdot x + 8}{4x^3 - 4} =$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{5ax^2 - 5ax - 8x + 8}{4(x^3 - 1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5ax(x-1) - 8(x-1)}{4(x-1)(x^2+x+1)} =$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(5ax - 8)}{4(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5ax - 8}{4(x^2+x+1)} =$

$= \frac{5a - 8}{12}$

Άρα πρέπει: $\frac{5a-8}{12} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5a - 8 = 27 \Leftrightarrow 5a = 35 \Leftrightarrow \boxed{a = 7}$

Από (1) $\Leftrightarrow \beta = 5 \cdot 7 + 8 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 43}$

ΘΕΜΑ Β

Β1 Θεωρία → Σχολικό Βιβλίο: σελ. 134

Β2 Θεωρία → Σχολικό Βιβλίο: σελ. 135

Β3

1. Σωστό	6. Σωστό
2. Λάθος	7. Σωστό
3. Λάθος	8. Σωστό
4. Λάθος	9. Σωστό
5. Λάθος	10. Λάθος

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - ax^2 + 27x + \beta$

i) $\left.\begin{array}{l} P(-3)=0 \\ P(2)=-15 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 162+\cancel{81}-9a-\cancel{81}+\beta=0 \\ 32-24-4a+54+\beta=-15 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -9a+\beta=-162 \\ -4a+\beta=-77 \quad (-) \\ \hline -5a=-85 \end{array} \Leftrightarrow \boxed{a=17}$

άρα: $-4\cdot 17+\beta=-77 \Leftrightarrow -68+\beta=-77 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-9}$

ii) Είναι: $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^4-3x^3-17x^2+27x-9=0$ ①

2	-3	-17	27	-9	-3
	-6	27	-30	9	
2	-9	10	-3	0	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow (x+3)(2x^3-9x^2+10x-3)=0$ ②

2	-9	10	-3	1
	2	-7	3	
2	-7	3	0	

Άρα η (2) $\Leftrightarrow (x+3)(x-1)(2x^2-7x+3)=0$

$\Leftrightarrow x+3=0$ ή $x-1=0$ ή $2x^2-7x+3=0$ $\quad \Delta=25$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-3}$ ή $\boxed{x=1}$ $\quad x_{1,2}=\frac{7\pm 5}{4} \Rightarrow \boxed{x=3}$ ή $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

iii) $P(x)\le 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)(2x^2-7x+3)\le 0$

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{2}$		1		3	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x^2-7x+3$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

άρα $\boxed{x\in[-3,\frac{1}{2}]\cup[1,3]}$

iv) Αφού $-\pi<-3 \Rightarrow P(-\pi)>0$

Αφού $1<\frac{\pi}{2}<3 \Rightarrow P(\frac{\pi}{2})<0$

Αφού $2017>3 \Rightarrow P(2017)>0$

με $\Pi=P(-\pi)\cdot P(\frac{\pi}{2})\cdot P(2017) \Rightarrow \boxed{\Pi<0}$

v) Είναι: $2\sigma\upsilon\nu^4x-3\eta\mu^3x+13\sigma\upsilon\nu^2x+27\eta\mu x=24$

$\Leftrightarrow 2(\sigma\upsilon\nu^2x)^2-3\eta\mu^3x+13\sigma\upsilon\nu^2x+27\eta\mu x=24$

$\Leftrightarrow 2(1-\eta\mu^2x)^2-3\eta\mu^3x+13(1-\eta\mu^2x)+27\eta\mu x=24$

$\Leftrightarrow 2(1-2\eta\mu^2x+\eta\mu^4x)-3\eta\mu^3x+13-13\eta\mu^2x+27\eta\mu x-24=0$

$\Leftrightarrow 2-4\eta\mu^2x+2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x+13-13\eta\mu^2x+27\eta\mu x-24=0$

$\Leftrightarrow 2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x-17\eta\mu^2x+27\eta\mu x-9=0$

Θέτουμε: $\eta\mu x=\omega$, $-1\le\omega\le1$ οπότε έχουμε

$2\omega^4-3\omega^3-17\omega^2+27\omega-9=0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$

$\omega=-3$ ή $\omega=1$ ή $\omega=3$ ή $\omega=\frac{1}{2}$

Απορ. (για $\omega=-3$), Απορ. (για $\omega=3$)

Αν $\omega=1 \Rightarrow \eta\mu x=1 \Leftrightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}$

Αν $\omega=\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}}$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$

$\boxed{x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}$

$\kappa\in\mathbb{Z}$

Γ2) Έχουμε: $\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}+\dfrac{4-2x^3}{x^2-4x+3}\geq\dfrac{x^2}{x-3}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{x-1}+\dfrac{4-2x^3}{(x-1)(x-3)}-\dfrac{x^2}{x-3}\geq 0$, $x\neq 1,\ x\neq 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x^2-4x+4)(x-3)+4-2x^3-x^2(x-1)}{(x-1)(x-3)}\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3-3x^2-4x^2+12x+4x-12+4-2x^3-x^3+x^2}{(x-1)(x-3)}\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^3-6x^2+16x-8}{(x-1)(x-3)}\geq 0$

$\Leftrightarrow (-2x^3-6x^2+16x-8)(x-1)(x-3)\geq 0$

$\Leftrightarrow -2(x^3+3x^2-8x+4)(x-1)(x-3)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x^3+3x^2-8x+4)(x-1)(x-3)\leq 0$ (1)

1	3	-8	4	1
	1	4	-4	
1	4	-4	$\boxed{0}$	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x-4)(x-1)(x-3)\leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2+4x-4)(x-1)^2(x-3)\leq 0$

• $x^2+4x-4=0$, $\Delta=32$ • $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$ • $x-3=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-4\pm4\sqrt{2}}{2}$ $x_1=-2+2\sqrt{2}$, $x_2=-2-2\sqrt{2}$ $x-1=0\Leftrightarrow$ $x=1$ $x=3$

x	$-\infty$		$-2-2\sqrt{2}$		$-2+2\sqrt{2}$		1		3		$+\infty$
x^2+4x-4		+	0	−	0	+		+		+	
$(x-1)^2$		+		+		+	0	+		+	
$x-3$		−		−		−		−	0	+	
Γ		−	0	+	0	−		−		+	

$\boxed{x\in(-\infty,-2-2\sqrt{2}]\cup[-2+\sqrt{2},1)\cup(1,3)}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Έχουμε: $P(1)=14$ και $P(-2)=-1$

Η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2+x-2 είναι:

$P(x)=(x^2+x-2)\pi(x)+\upsilon(x)$

Αφού ο διαιρέτης x^2+x-2 είναι $2^{ου}$ βαθμού

το υπόλοιπο θα είναι το πολύ $1^{ου}$ βαθμού

οπότε: $P(x)=(x^2+x-2)\cdot\pi(x)+\alpha x+\beta$ (1)

Έχουμε: $P(1)=14 \Leftrightarrow \underbrace{(1+1-2)}_{0}\cdot\pi(1)+\alpha+\beta=14 \Leftrightarrow \alpha+\beta=14$

$P(-2)=-1 \Leftrightarrow (4-2-2)\pi(-2)-2\alpha+\beta=-1 \Leftrightarrow -2\alpha+\beta=-1$ (−)

$3\alpha=15 \Leftrightarrow \alpha=5$

άρα: $5+\beta=14 \Leftrightarrow \beta=9$

Άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι: $\boxed{\upsilon(x)=5x+9}$

Δ2 Το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το $\pi(x)$

• Horner του $P(x)$ με το $x-2$

1	0	$\alpha-1$	$\beta+3$	2
	2	4	$2\alpha+6$	
1	2	$\alpha+3$	$\boxed{2\alpha+\beta+9}$	

• Horner του $\pi(x)$ με το $x-2$

1	2	$\alpha+3$	2
	2	8	
1	4	$\boxed{\alpha+11}$	

πρέπει: $\left.\begin{array}{l}\alpha+11=0\\ 2\alpha+\beta+9=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha=-11}$

$-22+\beta+9=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=13}$

Δ3 i) $\sqrt{2x+12} - \sqrt{3-x} = 3 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2x+12} = \sqrt{3-x} + 3$ (1)

πρέπει: $2x+12 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -12 \Leftrightarrow x \geq -6$
$3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$\Rightarrow -6 \leq x \leq 3$

Από (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+12}^2 = (\sqrt{3-x}+3)^2$

$\Leftrightarrow 2x+12 = 3-x+6\sqrt{3-x}+9$

$\Leftrightarrow 3x = 6\sqrt{3-x}$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{3-x}$ (2)

πρέπει: $x \geq 0$
και $-6 \leq x \leq 3$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 3$

Από (2) $\Leftrightarrow x^2 = (2\sqrt{3-x})^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4(3-x)$

$\Leftrightarrow x^2 = 12-4x$

$\Leftrightarrow x^2+4x-12=0$

$\Leftrightarrow x=-6$ ή $\boxed{x=2}$

Απορ.

ii) $\sqrt[3]{x^2-4x+4} - 2\sqrt[3]{x-2} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{(x-2)^2} - 2\sqrt[3]{x-2} - 3 = 0$ (2)

πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x-2} = \omega \geq 0$, οπότε η (2) γίνεται:

$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\omega = 3$ ή $\omega = -1$

$\sqrt[3]{x-2} = 3$ Απορ.

$x-2=27$

$\boxed{x=29}$

Εν Δυνάμει

(Δ4) $\sqrt{x^2-3x} \geq x-3$ (1)

πρέπει: $x^2-3x \geq 0$

έστω $x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$

x	$-\infty$ 0 3 $+\infty$
x^2-3x	+ 0 − 0 +

άρα πρέπει: $x \leq 0$ ή $x \geq 3$

• Αν $x-3<0 \Leftrightarrow \underline{x<3}$

τότε η (1) ισχύει πάντα

δηλ. για καθε $x<3$
και έχουμε $x \leq 0$ ή $x \geq 3$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{x \leq 0}$

• Αν $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow \underline{x \geq 3}$

τότε η (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x}^2 \geq (x-3)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-3x \geq \cancel{x^2}-6x+9$

$\Leftrightarrow 3x \geq 9$

$\Leftrightarrow \boxed{x \geq 3}$

Άρα $\boxed{x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)}$